

| | |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| Title | 散逸粒子系に可積分系の手法は有効か(離散可積分系と離散解析) |
| Author(s) | 早川, 尚男 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (1997), 1020: 85-102 |
| Issue Date | 1997-12 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/61665 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

散逸粒子系に可積分系の手法は有効か

早川尚男 (Hisao Hayakawa)*

京都大学大学院人間・環境学研究科

(Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University 606-01)

1 はじめに

粉体・交通流などの離散散逸粒子系の問題は工学的重要性は言うまでもなく、最近物理の分野でも注目を集めるようになってきた [1, 2]。特に粉体は日常の至る所でお目にかかれるだけにその応用は広い。数理解析の対象として散逸粒子系を考えると、その難しさには目を覆いたくなる。従って盛んに粉体の研究がなされているのにも拘らず、すっきり理解された現象は殆んどない。その中で擬 1 次元系であるパイプ流や交通流の問題は比較的数理解析が簡単であり、現象のかなりの部分が理解できる。殊に純粋な 1 次元系ではある極限で可積分方程式に帰着し、ソリトン摂動法によって現象の定量的理解が可能である。本稿では現在、擬 1 次元散逸粒子系で何が解析可能で何が難しいのかを可積分系の手法を横目で睨みつつ解説する。

構成としては次節で散逸粒子系を如何にモデル化するかという心構えを説き、1 次元系の散逸粒子系に対する一連のモデルを紹介する。3 節以下では最近、筆者等によって提唱された交通流モデルを用いて解析の結果どのような数理解析が明らかになりつつあるかを紹介する。3 節では一様流（非渋滞流）の線形安定性を詳しく解析し、4 節では弱非線形解析を試みる。5 節ではモデルを直接、数値計算によって解析した結果と 4 節の解析結果と比較し、4 節の解析が定量的に正しい結果を与える事を確認する。また 6 節では純粋な 1 次元系を離れて擬 1 次元系に問題を拡張した場合に実験等で観測される $1/f^{4/3}$ スペクトルが極めて簡単に理解できることを紹介する。

2 モデル化

実は散逸粒子系に限らず、巨視的現象の記述の際に一番難しいのはモデル化をどのようにするのか、という処にある。単にモデルをシミュレートできるというだけでなく、解析のしやすいモデル、またある程度ミクロなプロセスを反映したモデルが必要になる。また大抵の場合は従来存在しているモデルとの比較が必要になる。

粉体や交通流などの場合、ミクロなモデルが存在しないために尚更問題が難しくなっている。つまり実際に単体として内部構造を持っているばかりでなく粒子（車）の間の相互作用は自明ではないということである。そのために尤もらしいモデルを構成し、シミュレーションなりで解析を行ない、何某の結果を提出しても、実際にその解析が現実に対応しているのかが分からない。それなりの研究史があれば多くのモデルが存在するので、モデルのマイナーな変化に依存する結果は意味がない。言い替えればモデルの詳細に依らないユニバーサルな結果のみが意味がある。そのユニバーサルな結果を回復するものの中で最も解析のしやすいものが優れたモデルと考えられる。

*email: hisao@phys.h.kyoto-u.ac.jp

話しを追い越しの出来ない車の形成する交通流を中心に据えて話しをする [3]。当然車の追い越しを考慮すれば解析結果は変わってしまうが 1) 理論解析がしやすい、2) 追い越しがない場合に良いモデルを同定してから追い越し問題を考える、という利点がある。従って追い越しに伴う問題の複雑化は後ほど触れるとして暫くは純粋な 1 次元系の話しに絞り背後に隠されている簡単な数理構造を明らかにする。また追い抜き等の多次元効果は 6 節で簡単に触れる。

最近、早川・中西 [3] は次の様な交通流のモデルを提唱した

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n)V(x_n - x_{n-1}) - \dot{x}_n], \quad (1)$$

ここで x_n と a はそれぞれ n 番目の車の位置と運転手の感度を表す。このモデルは運転手の心理を巧みに採り入れたものとなっている。即ち、 n 番目の車の運転手は前方の車間距離 $x_{n+1} - x_n$ を考慮してその最適な速度で走ろうとする。同様に後方からのパッシングを受けると加速する。(1) 式での最適速度関数 $U(x)$ は遠方 $x \gg 1$ では車の性能などで決まる一定速度、充分接近した場合に衝突しないためには $U(x \rightarrow 0) = 0$, $U'(x)|_{x \rightarrow 0} > 0$ を充す必要がある。また後方の車が充分離れると後方車の影響はないので $V(x \rightarrow \infty) = 1$ である。これらの事を考慮して $U(x)$, $V(x)$ はそれぞれ変数の単調増加関数、単調減少関数として良い。またこの 2 種の最適速度関数を積として導入したのは後方の車がいくら接近しても前方の車間距離が充分にないと加速できないという事実を反映している。つまり $V(x)$ は $U(x)$ に従属していると言えるだろう。シミュレーションなどでは具体的な最適速度関数の形を決めなければならない。ここでは f_0 を定数として

$$U(h) = \tanh(h - 2) + \tanh(2); \quad V(h) = 1 + f_0(1 - \tanh(h - 2)) \quad (2)$$

と選ぶ。しかし後の解析で見る様にこの関数の選び方に解析結果は大きく依存していない。

(1) 式のモデルは坂東等 [4] によって提唱された

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n]. \quad (3)$$

の一般化になっている。即ち $V(x) = 1$ 或は $f_0 = 0$ とおくことで (1) は (3) になる。このモデルの数理的構造は小松・佐々 [5] によって明らかにされた。即ち、一様解は平均車間距離 h に対して $a \leq 2U'(h)$ の場合、不安定である。また微小揺らぎの線形安定な領域と不安定領域を隔てる中立線近傍では (3) は KdV 方程式に帰着できるが、渋滞・非渋滞の相分離を記述するには最不安定な中立線上の点でのみ実現する MKdV 方程式が重要である。MKdV 方程式の摂動解は漸近的に厳密に状態発生のメカニズムを記述する。これらの結果から少なくとも (3) 式に立脚する限りにおいては殆んど残された問題はないように見える。その意味で (1) 式における後方参照関数の導入は意味のないことなのであろうか。

この問に答える前に他のモデルによる解析と比較してみよう。Kerner and Konhauser [6] は坂東等より前に密度場 ρ 及び流速場 v に対して

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= -\partial_x(\rho v) \\ \partial_t v &= -v \partial_x v - \frac{T}{\rho} \partial_x \rho + \frac{U_\rho(\rho) - v}{\tau} + \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2 v \end{aligned} \quad (4)$$

という現象論的な流体方程式を提唱している。ここで第 1 式は質量の保存を表し、第 2 式は非圧縮条件の下での運動量の保存である。体積力として最適速度への緩和 $\frac{U_\rho(\rho) - v}{\tau}$ を含むのは (1), (3) と同様である。一方、このモデルでは離散モデルの差分に陰に含まれる高階微分の効果を圧力項 $\partial_x \rho$, 及び $\partial_x^2 v$ で表し、解を安定化させている。常識的には (4) の方がモデルとして (1), (3) といっ

た離散モデルより分かりにくい、連続の方程式を並べただけの (4) の方が変にモデル化の手続きを踏んでいないという点で分かりやすいという意見もあろう。要は解が同一であればその好みに応じて基礎方程式を選べばいいのである¹。ところが小松 [7] によると (4) 式のモデルは坂東等のモデルとは異なり、中立線上で KdV 方程式に帰着しない、即ち 2 次の非線形が消える点（臨界点）は最不安定な中立線の頂点とは一致しない。また臨界点では MKdV 方程式に帰着しない。更に渋滞・非渋滞の相分離は一般に線形不安定な相と安定な相との分離になっている。などの興味深い結果が数値的に示された。また (4) 式のパラメーターをうまく選ぶと坂東等のモデルと同様の性質を持ち得る事が示唆されている。即ち、(4) 式のモデルは坂東等のモデルより広いユニバーサリティークラスに属していると言える。後から示す様に (1) 式で導入されたモデルは (4) 式の流体モデル同様、より広いクラスに属するモデルとなっている。

さて冒頭で粉体の擬 1 次元流についても紹介した。実際の実験を粒子の追い越しを禁止するように行なうことはされていないが数値的研究の多くは 1 次元流を仮定しており (4) の流体モデルと類似である。ここでは佐々・早川 [8] による

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= -\partial_x(\rho v) \\ \partial_t v &= -v\partial_x v - \zeta(\rho)(V-v) - \frac{1}{Fr} - f''(\rho)\partial_x \rho + \kappa\partial_x^3 \rho + \frac{1}{\rho}\partial_x(\rho\mu(\rho)\partial_x v)\end{aligned}\quad (5)$$

を標準的な流体モデルとして紹介しよう。かなり複雑であるが変数及び意味は (4) と対応させれば理解できる。ここで κ に比例する項はより方程式系を安定化させるために導入され、粉体の相互衝突によって生じる圧力 $f'(\rho)$ は平均密度 ρ_0 に揃え、最密充填 ρ_{cp} で発散することも考慮し $f(\rho) = \alpha(\rho - \rho_0)^2 / (\rho_{cp} - \rho)$ とした。また動粘性率 $\mu(\rho)$ も ρ_{cp} で発散することから $\mu(\rho) = \beta / (\rho_{cp} - \rho)$ と選べば良い。更に V は非圧縮条件から定数として良く、 $\zeta(\rho)$ は沈澱法則などから決まる現象論的な摩擦である。これらのモデルの詳細に依らず中立線近傍では (4) と同様な方程式に帰着できることは容易に想像できるであろう。

また粉体系に対しても離散粒子モデルを導入することが可能である [9]。そこでは粒子を番号付けて

$$\ddot{x}_n = \zeta[\tilde{U}(x_{n+1} - x_{n-1}) - \dot{x}_n] + f(x_{n+1} - x_n) - f(x_n - x_{n-1}) \quad (6)$$

とすれば良い。但し $f(x)$ は距離の関数であり、粒子衝突をソフトコアの斥力ポテンシャルの効果で置き換えたものである。また最適速度 $\tilde{U}(x)$ は粒子の沈澱速度などから決まると考えられる。おそらく (5) と (6) を比べたときに、後者の方が簡単で分かりやすいということに異論はないと思う。言うまでもないことであるが前者と後者は中立線近傍では全く同様の性質を示すので同一のユニバーサリティークラスに属すると考えられる。

解析の前に (1), (4), (5), (6) が同一のクラスに属すると言っても説得力がないので、結果を先取りして (4) の数値解及び次節以下（特に 4 節）で示す方法に則った解析解の一致を図 1 に示す [10]。既に紹介した通り渋滞・非渋滞転移の共存線は線形不安定な相と線形安定な相に分離しているが解析解が驚くべき精度でその値を予言している。臨界点に近づくにつれ漸近的に厳密であるというのは（ここで示していない密度場のプロファイルを含めて）間違いない。

3 1 次元モデルの線形安定性

さて上記の通りどのモデルを用いても (1) 式の結果と大差がないことが期待できるので、以下では暫くそのモデルに周期境界条件を課した問題に限定して話しをしよう。

¹ 勿論シミュレーションは離散モデルの方が容易であり、計算時間もかからない。

まず (1) を以下の様に書き換える：

$$\ddot{r}_n = a[U(h+r_{n+1})V(h+r_n) - U(h+r_n)V(h+r_{n-1}) - \dot{r}_n] \quad (7)$$

ここで h は平均車間距離であり、 r_n は $x_{n+1} - x_n - h$ である。

まず (7) 式の一様解に対する線形安定性を考えよう。 $r_n(t) = 0$ のまわりの (7) 式の線形方程式は

$$\ddot{r}_n = a[U'(h)V(h)(r_{n+1} - r_n) + U(h)V'(h)(r_n - r_{n-1}) - \dot{r}_n] \quad (8)$$

で与えられる。ここでプライムは変数に対する全微分を表している。車の全台数を N , $q = 2\pi m/Nh$ としてフーリエ変換 $r_q(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp[-iqnh]r_n(t)$ を用いて (8) を書き直すと

$$(\partial_t - \sigma_+(q))(\partial_t - \sigma_-(q))r_q(t) = 0 \quad (9)$$

となる。但し

$$\sigma_{\pm}(q) = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(a/2)^2 - aD_h[U, V](1 - \cos(qh)) + ia(UV)' \sin(qh)}, \quad (10)$$

である。ここで関数 U, V の独立変数 h の表示は省略している。また $D_h[U, V] \equiv U'(h)V(h) - U(h)V'(h)$ は広田微分である。従って線形方程式 (9) 式の初期値問題の解は $\exp[\sigma_+(q)t]$ と $\exp[\sigma_-(q)t]$ の線形結合で与えられることになる。言うまでもないが $\exp[\sigma_-(q)t]$ に比例する項は時間 $1/a$ で減衰する車の速い運動のみを記述している。一方、 $\exp[\sigma_+(q)t]$ に比例する項が長時間の振舞いに重要な不安定モードを表す。

(8) 式の線形安定性の破れは $\text{Re}[\sigma_+(q)] \geq 0$ と等価である。 $qh = 0$ は粒子数の保存則から常に中立モードなので $qh \neq 0$ の場合の不安定の条件は $2(UV)'^2 \cos^2\left(\frac{qh}{2}\right) \geq aD_h[U, V]$ となる。余弦関数が 1 を越えないことを考慮すると長波不安定、つまり $qh \rightarrow 0$ が最も不安定であり、中立安定線は

$$a = a_n(h) \equiv \frac{2(UV)'^2}{D_h[U, V]}. \quad (11)$$

で与えられることになる。図 2 の破線は (2) で $f_0 = 1/(1 + \tanh(2))$ としたときにパラメータ空間 (a, h) 中での中立線を表している。後ほどの議論のために中立線近傍での σ_+ の長波展開の陽な表式

$$\sigma_+(q) = ic_0qh - c_0^2 \frac{a - a_n(h)}{a_n(h)^2} (qh)^2 - i \frac{(qh)^3}{6} c_0 - \frac{(qh)^4}{4a_n(h)} c_0^2 + O((qh)^5) \quad (12)$$

を書いておこう。但し $c_0 = (UV)'$ である。この式から明らかなことは $a < a_n(h)$ であれば拡散係数が負になって一様状態は長波不安定を起こすということである。

4 1次元モデルの弱非線形解析

一様解が線形不安定になれば非線形解析が必要になる。そのうちで最も単純な方法は長波展開による弱非線形解析である。線形分散関係 (12) から直ちに分かる事は、まず実部は $(qh)^2$ と $(qh)^4$ がバランスする必要がある、 c_0 だけガリレイ変換することで iqh の項は吸収できるので、分散関係で最も大事な項は $i(qh)^3$ に比例する項である。この項と 2 次の非線形項 $\partial_x r^2$ がバランスすると最低次で KdV 方程式に帰着できることは容易にわかる [6, 8]。しかしながら KdV 方程式はバル

ス解しか持たないので渋滞・非渋滞の転移を表すには不適切である。その場合には2次の非線形項が消える臨界点即ち中立線と $(U(h)V(h))'' = 0$ の交点をパラメータ空間上の点として選ばねばならない。この臨界点は例えば (2) 式で $f_0 = 1/(1 + \tanh(2))$ と選ぶと

$$h_c = 2 - \tanh^{-1}(1/3) \simeq 1.65343; \quad a_c = \frac{512}{81} f_0^2 \simeq 1.63866. \quad (13)$$

となる。この点の回りで方程式を展開すると MKdV 方程式とはならないで時間発展に対して不安定な方程式が得られる。実際、変数を $\epsilon = \sqrt{(a_c - a)/a_c}$ を用いて $r_n(t) = \epsilon r(z, \tau)$, $z = \epsilon(x + c_0 t)$ 及び $\tau = \epsilon^3 t$ とスケールすると

$$\partial_\tau r = a_1 \partial_z r^3 - a_2 \partial_z^3 r + a_3 \partial_z^2 r^2 \quad (14)$$

という方程式が得られる。但し a_1, a_2 及び a_3 は定数である。この方程式を $r = d_0$ の回りで線形化すると $r - d_0 \simeq \exp[ikz + \lambda_k \tau]$ と書けるが、その解は不安定になる。実際、揺らぎの成長率は $\text{Re}[\lambda_k] = 2k^2 a_3 d_0$ となって $a_3 d_0 > 0$ では全てのスケールで正となって解が爆発する他ない。従って (14) を直接シミュレーションしても数値解は爆発する。このように小松・佐々[5]で成功したスキームはより一般のモデルの場合破綻して使えない。つまり偏微分方程式として使えるためには最低でも短波長の正則性が保証されている必要がある。

勿論こうした偏微分方程式の短波スケールでの非正則性はその式を導いた長波展開が破綻していることを意味している。例えば元のモデル (1) の正則性は簡単にチェックすることができる。 $x = nh$ を連続変数とみなすと1粒子分の並進は $r(x \pm h, t) = \exp[\pm h \partial_x] r(x, t)$ と等価である。或はそのフーリエ変換 $\exp[\pm i q h]$ を用いると実空間の並進演算子 $\exp[\pm h \partial_x]$ は $q h = \pi$ が最小のスケールであるから $r(x \pm h, t) \rightarrow -r(x, t)$ という置き換えを行なうこととである。従って (7) 式の $r(x, t)$ に対する方程式の短波極限は

$$\partial_t^2 r = a[W(r) - \partial_t r], \quad W(r) \equiv U(h-r)V(h+r) - U(h+r)V(h-r). \quad (15)$$

となる。(2) を (15) に代入すると $W'(r) = -(\text{sech}^2(h-r-2) + \text{sech}^2(h+r-2))\{1 + f_0(1 + \tanh(2))\} < 0$ となる。従って、(15) の線形化方程式の解を $r - d_0 \sim \exp[\lambda t + i k x]$ として揺らぎの成長率 λ は

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a|W'(d_0)|}}{2}, \quad (16)$$

与えられる。このように任意の d_0 に対して $\text{Re}[\lambda] \leq 0$ が言えるので元のモデル (1) は短波揺らぎに対して線形安定であると結論される。

この様に短波スケールの不安定性はモデルを偏微分方程式に縮約する際に人為的に現れた。では長波展開を完全に捨ててしまう必要があるのであろうか。一つの方法は長波展開の方法を短波の情報を Pade 近似などを用いて部分的に採り入れことが考えられる [11]。しかしこの方法は離散モデルの場合短波のカットオフがあるために容易ではない上に、得られる方程式はどう見ても元の離散モデルより複雑である。もう一つの方法は解析的には定常伝搬解のみに着目し、動的な性質は直接シミュレーションによって調べるというものである。このことは、元の離散モデル (1) のシミュレーションの方が実は連続自由度を持つ偏微分方程式よりも簡単であり、またモデルの直接シミュレーションの結果現れる渋滞相は充分時間が経つと安定で単純な定常伝搬解が観測されるのみである事から実際的な選択であると思われる。以下では後者の立場から解析を進めてみる。

上記の立場に立って (7) 式を簡単化するには空間変数を連続として、時間の2階微分をまず1階微分の方程式にする

$$(\partial_t - \sigma_+ (\partial_x)) r(x, t) = (\sigma_+ - \sigma_-)^{-1} N[r(x, t)], \quad (17)$$

ここで $N[r]$ は UV の項から現れる非線形項であり

$$N[r] = UV - U'V(e^{h\partial_x} - 1)r(x, t) - UV'(1 - e^{-h\partial_x})r(x, t) \quad (18)$$

である。(17) 式の $(\sigma_+ - \sigma_-)^{-1}$ は微分演算子の多項式の逆演算子なので扱いにくい。そこで長波展開をした式 $(\sigma_+ - \sigma_-)^{-1} \simeq a^{-1}[1 - \frac{2h}{a}(UV)' \partial_x + O(h^2)]$ を用いると便利である。(17) 式は元の方程式の情報を殆んど残しており、時間発展に伴う不安定性はないことに注意すべきである。

渋滞・非渋滞の転移を表すキンの定常伝搬解を求めるために $\epsilon = \sqrt{(a_c - a)/a_c}$ による変数のスケーリングを仮定する

$$r(x, t) = \epsilon \sqrt{\frac{6\gamma c_0}{|(UV)''|}} R(z), \quad z = \epsilon \sqrt{6\gamma} \left\{ \frac{x}{h} + c_0 t (1 - \epsilon^2 \gamma(t)) \right\} \quad (19)$$

ここで UV などに現れる独立変数は全て $h = h_c$ であるとしよう。また $\gamma(t)$ は現時点では正のパラメータで後に摂動によって決められる。(19) 式を (17) に代入して非線形項の長波展開

$$N[r]/a = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} h^m C_{mn} \partial_x^n r^m - h^3 U'V' \partial_x r \partial_x^2 r + \dots \quad (20)$$

を用いる。但し $C_{21} = \frac{1}{2}(UV)''$, $C_{22} = \frac{1}{4}D_h[U, V]'$, $C_{23} = \frac{1}{12}(UV)''$, $C_{31} = \frac{1}{6}(UV)'''$, $C_{32} = \frac{1}{12}D_h[U, V]''$, $C_{41} = \frac{1}{24}(UV)''''$ である。すると

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{d^2 R}{dz^2} - R(R^2 - 1) + \beta \frac{d}{dz}(R^2) \right\} = \epsilon \frac{d}{dz} M[R] \quad (21)$$

を得る。ここで $\beta = 3D_h[U, V]'/(2\sqrt{c_0|(UV)''|})$ であり

$$M[R] = \sqrt{\gamma} [\rho_{23} \left(\frac{dR}{dz} \right)^2 - \rho_{32} \frac{dR^3}{dz} - \rho_{41} R^4 - \frac{1}{4\eta} (4 \frac{dR}{dz} + \frac{d^3 R}{dz^3} - \frac{2}{\gamma} \frac{dR}{dz})] + \gamma [\frac{zR}{2\gamma^{5/2}} - \gamma t R], \quad (22)$$

である。但し γ は $O(\epsilon)$ であると仮定し、 $1/\eta = \sqrt{6}D_h[U, V]/c_0$, $\rho_{23} = 3\sqrt{6}U'V'/\sqrt{c_0|(UV)''|}$, $\rho_{32} = \sqrt{3/2}D_h[U, V]''/|(UV)'''|$ 及 $\rho_{41} = \sqrt{3c_0}(UV)''''/(2\sqrt{2|(UV)''|}^3)$ である。

ここで $R(z) = R_0(z) + \epsilon R_1(z) + \dots$ という ϵ による展開が可能であると仮定すると、最低次で

$$R_0^{(\pm)}(z) = \tanh(\theta_{\pm} z); \quad \theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2}}{2} \quad (23)$$

という解があることがわかる。(23) における解は $\theta_+ > 0$, $\theta_- < 0$ であることから渋滞相と非渋滞相を結ぶ非対称なキンクと反キンクを表している。ここで注意すべきは (23) 式の解が境界まで影響を及ぼす事、言い替えれば今まで陰に仮定して来た周期境界条件を充さない事である。実際、これから紹介する摂動が成立するための可解条件に重要な役割を果たすゼロ固有関数は境界条件に依存し、その結果、散逸摂動に伴って生じるパラメータ $\gamma(t)$ の選択値は境界条件によって微妙に異なる事がわかっている。

ここでは境界条件の影響については他の論文 [12] で詳細に論じるとして周期境界条件下での選択問題に焦点を絞る。この際、

$$R_0(z) \simeq R_0^{(+)}(z - z_+) - 1 + R_0^{(-)}(z - z_-) \quad (24)$$

とおくと周期境界条件を充す $z = \pm z_{\pm}$ にある 2 つの界面を近似的に表す。しかし注意すべきは (24) はそれぞれの界面の中心 $z = \pm z_{\pm}$ を除き (21) の最低次の式の近似解に過ぎない点である。(24) を (21) に代入すると線形方程式

$$\mathcal{L}R_1 = \frac{d}{dz}M[R_0] \quad (25)$$

を得る。ここで

$$\mathcal{L} = \partial_z^3 + \partial_z - 6R_0\partial_z - 3R_0^2\partial_z + 2\beta\partial_z^2R_0 + 4\beta\partial_zR_0\partial_z + 2\beta R_0\partial_z^2 \quad (26)$$

である。

摂動が無矛盾に定義されるためには摂動解がゼロ固有関数と直交する必要がある。この可解条件は

$$(\Psi_0, \frac{d}{dz}M[R_0]) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dz \Psi_0 M[R_0] = 0, \quad (27)$$

で表される。但し L はシステムサイズであり、 Ψ_0 は

$$\mathcal{L}^\dagger \Phi_0 = 0; \quad \mathcal{L}^\dagger = -\partial_z^3 - \partial_z + 3R_0^2\partial_z + 2\beta R_0\partial_z^2 \quad (28)$$

を充す。ここで R_0 が近似的に (24) で表されるとすると、 Ψ_0 も周期境界条件に合致した

$$\Psi_0(z) = \Psi_0^{(+)}(z - z_+) - 1 + \Psi_0^{(-)}(z - z_-) \quad (29)$$

と選ぶべきであろう。但し $\Psi_0^{(\pm)}$ はそれぞれ 1 界面のゼロ固有関数で、(28) 式における \mathcal{L}^\dagger で R_0 のかわりに $R_0^{(\pm)}$ とおいた解になる。ここで

$$\tilde{\mathcal{L}}^\dagger \Phi_0(z) = 0; \quad \tilde{\mathcal{L}}^\dagger = -\partial_z^2 - 1 + 3R_0^2 + 2\beta R_0\partial_z \quad (30)$$

を $\Phi_0 = \partial_z \Psi_0$ が充すので (30) の解

$$\Phi_0^{(\pm)}(z) = (\text{sech}[\theta_{\pm} z])^{1/\theta_{\pm}^2} \quad (31)$$

から (28) の解は

$$\Psi_0^{(\pm)}(z) = \frac{\alpha_{\pm}}{2} \int_{-z}^z dz' (\text{sech}[\theta_{\pm} z'])^{1/\theta_{\pm}^2}; \quad \Psi_0^{(\pm)}(z) = -\Psi_0^{(\pm)}(-z) \quad (32)$$

となる。ここで定数 α_{\pm} は $\Psi_0(z)$ が $R_0(z)$ 同様に $\Psi_0(\pm\infty) = -1$ を充す様に決める。従って

$$\alpha_{\pm} = \frac{2\theta_{\pm}}{I_0^{(\pm)}}; \quad I_n^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\text{sech} x)^{1/\theta_{\pm}^2 + 2n} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/(2\theta_{\pm}^2) + n)}{\Gamma(1/(2\theta_{\pm}^2) + n + 1/2)} \quad (33)$$

である。ここで $\Gamma(x)$ は Γ 関数である。注意すべきは $\Psi_0(z)$ が $R_0(z)$ 同様、局在した関数ではない事である。その事を反映して (27) の積分の上端と下端にはシステムサイズ L が現れている。

今、可解条件 (27) を部分積分によって、次の様に書き換える。

$$[\Psi_0 M[R_0]]_{-L}^L = (\Phi_0(z), M[R_0]) \quad (34)$$

但し $[f(z)]_{-L}^L = f(L) - f(-L)$ である。ここで (22) に戻ると、 $M[R_0]$ のうち境界条件に依存し得る項は ρ_{41} に比例する項と zR に比例する項のみである。但し tR に比例する項は対称性から寄与が

ない。このうち ρ_{41} に比例する項は周期境界を考慮した(24), (29)を用いると寄与はキャンセルする²。結局、これらの事実から(34)の左辺は

$$[\Psi_0 M[R_0]]_{-L}^L = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^{5/2}} L \quad (35)$$

となる。一方、右辺も計算できるので結局

$$\{L - (\theta_+ - \theta_-)\} \dot{\gamma} = 4\beta \gamma^2 \left\{ \frac{\theta_+}{\theta_+^2 + 1} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_+}\right) - \frac{\theta_-}{\theta_-^2 + 1} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_-}\right) \right\} \quad (36)$$

となる。(36)式を導くために $\frac{I_{n+1}^{(\pm)}}{I_n^{(\pm)}} = \frac{2n\theta_{\pm}^2 + 1}{(2n+1)\theta_{\pm}^2 + 1}$ を用いた。また γ_{\pm} は境界条件を気にしないで求めた選択値であり

$$\gamma_{\pm}^{-1} = 2 + \theta_{\pm}^2 \left(2 - 3 \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}} \right) + 2\eta [3\rho_{32} \left(1 - \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}} \right) + \frac{\rho_{41}}{\theta_{\pm}} \left(\frac{I_0^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}} - 2 + \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}} \right) - \rho_{23} \theta_{\pm} \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}}] \quad (37)$$

である。ここで(36)にシステムサイズ L が現れ、系の緩和時間が無限系で車の台数に比例して発散しているのは統計力学の常識と相反して、一見奇異に映るかもしれない。しかしながらシミュレーションを行なう際に車の台数に比例して計算時間がかかるのは極めて自然な事である。この緩和時間のシステムサイズ依存性は界面の厚さを固定してシステムサイズを系統的に変化させるシミュレーションによって確認されている[10, 12]。

具体的な値を求めてこのスキームの正しさを実証するために(2)式の定数を $f_0 = 1/(1+\tanh(2))$ と選んでみよう。この場合(37)式の諸定数が $\rho_{23} = -3/2$, $\rho_{32} = -\beta$, $\rho_{41} = -1/4$, $\eta = 1/(4\beta)$, $c_0 = 2^6 f_0 / 3^3 = 1.20689$, 及び $\beta = 3\sqrt{3}/(8\sqrt{2}f_0) = 0.902037$, $6c_0/|(UV)'''| = 9/4$, $\theta_+ = 1.2897187$, $\theta_- = -0.3876814$ と決まる。このようにして γ_{\pm} は

$$\gamma_{\pm} = \frac{4(2\theta_{\pm}^2 - 1)(3\theta_{\pm}^2 + 1)}{37\theta_{\pm}^4 + 8\theta_{\pm}^2 - 8}, \quad (38)$$

と計算できる。従って選択される γ^* は

$$\gamma^* = 0.574189 \quad (39)$$

と結論される。臨界現象風に理解するならば(19)式から相分離の秩序変数を振幅 $A\epsilon$ として臨界点近傍では

$$A\epsilon \equiv \frac{3}{2}\epsilon\sqrt{\gamma^*} = 1.13663\epsilon \quad (40)$$

となる事を意味している。

5 決定論方程式の数値シミュレーションとコメント

前節での解析的手法による結果(39)の正当性を(1)式及び(2)式で $f_0 = 1/(1+\tanh(2))$ と選んだモデルの直接数値シミュレーションを行なってみた。境界条件としては前節同様、周期境界条件を課し、4次の古典的ルンゲ・クッタ法を用いた。シミュレーションでは時間刻みを $\Delta t = 1/2^4$ に固定

²逆に言えば自由境界条件下では ρ_{41} に比例する項の寄与があることを示唆しているが、実際にその依存性は数値的にも確かめられている

して行なった。更に計算の収束を早めるために初期条件として局在ドメイン $r_n = 18.7/N(\tanh(n - N/4) - \tanh(n - 3N/4) - 1)$ を選んだ。但し N は車の台数である。スケーリングの存在を考慮して ϵ と N のパラメータセットとして $(\epsilon, N) = (1/2, 32), (1/4, 64), (1/8, 128), (1/16, 256)$ を選び r_n が定常伝搬解に落ち着くまで計算を行なった。この結果は図2及び図3にまとめてある。図2では個々のパラメータに対して連続する車の車間距離の最大値及び最小値をプロットした。一方、実線は理論的に予想される共存曲線は $a = a_c(1 - \epsilon^2)$ と $A\epsilon = h - h_c$ であることから

$$a = a_c \left(1 - \frac{(h - h_c)^2}{A^2} \right); \quad (41)$$

である。ここで(40)に示した通り、 A は臨界点近傍での相分離の振幅を ϵ で割ったものである。特筆すべきは $\epsilon = 1/16$ での理論値とシミュレーションの値のずれは1%未満である事である。興味深いのは実線で示した共存線が線形安定相と不安定相の双方にまたがっていることである。従って長波展開では時間発展を記述できない。それにも拘らず、定常伝搬解に関してはほぼ厳密でかつ安定な解が得られたというのは隠された物理的な意味があるのかもしれない。図3はスケールされた車間距離をスケールされた車番の関数としてプロットしたものである。まずデータ点が明らかに1つのユニバーサルカーブに乗っており非対称なキンク・反キンクのペアが存在する。また実線は(23)及び(39)で決まる理論値である。フィッティングパラメータはキンクの位置のみであるが、理論とシミュレーションの一致はほぼ完全である。

前節で紹介した理論的解析は枠組は必ずしも完全ではないがほぼ完璧に数値計算の結果を再現する。また数値計算の結果から解析そのものは $\epsilon \rightarrow 0$ で漸近的に厳密な結果であることを示唆している。実際、前節の解析から予想される緩和時間がシステムサイズに線形に依存すること及び境界条件によって緩和する値が異なる事は数値的にもある特定の場合には確認されている。同時にここでは詳しくは述べなかったが渋滞・非渋滞を隔てるキンクと反キンクは相対距離の指数関数で決まる相互作用を持つことが予想されている[12]。境界条件の影響及びキンク間の相互作用についての系統的研究は改めて稿を起す予定である。

更にここで述べた結果が臨界点近傍でのスケーリングというミクロなモデルの詳細によらない結果を用いている。従って広く1次元系一般についてここでの解析は有効である。実際、小松[7]で示唆された通り交通流の流体モデル(4)でも同様のスケーリングが成立している。最近、著者等は前節の手法を流体モデルに適用してやはり1%以内の誤差でその処方が有効であることを確認してある。粉体流に対しても(5)と(4)の類似性、或は(6)と(1)の類似性から前節の結果が有効であることは殆んど間違いない。逆に言えば(2)で $f_0 = 0$ と選んだ坂東等のモデル[4]は余りにも対称性がよく、特殊な場合にしか有効ではないという事を示唆している。

6 密度揺らぎのパワースペクトル

純粋な1次元流の解析は前節までの解説で見る様に方法論については若干の議論はあっても、得られた結果自体は十分に満足のいく結果と言ってよい。ところが、実際の交通流では同一の車が一車線のサーキットで追い抜きのできない状態で走行することは考えられないし、粉体流の場合は流路が粉体と同程度という事はまず實際上考えられない。従って粒子(車)の追い越し等の多次元効果が重要になってくる。

最近、筆者等[13]は次の様な2車線の交通流モデルを研究してみた。各車はどのレーンを走っているかを内部変数として持ち、各走行レーンでは(1)式のモデルに従う。各車は1次元に射影可能(つまり順序付け可能)であるとする。車の流れの平衡状態としては両方の走行レーンにで

きただけ散らばるのが望ましいので内部変数として反強磁性体の Ising spin を持つとしてそのエネルギー固有値がなるべく低くなるように状態を選ぶ。また実際の走行レーンの変更のルールは Ising model の動的モデルである Glauber dynamics に従う。このモデルの直接シミュレーションから得られた結果は前節までの結果と異なり、渋滞相の形成は必ずしも安定でなく、図3に示すような安定な相分離界面は見られないというものである。また車間距離の時間揺らぎのパワースペクトル $P(f)$, (f :振動数) は

$$P(f) \sim f^{-4/3} \quad (42)$$

と近い結果を得た。

ここでシミュレーションによる指数の最確値を紹介せず (42) 式とデータを比較したのは、数年前に Peng and Herrmann[14] がパイプ中の粉体流の Cellular Automaton によるシミュレーションの結果と等しく、更に筆者による以下に解説する理論解析 [9] と一致し、その上、擬一次元的な粉体のパイプ流の実験におけるパワースペクトル [9] と一致しているからである。従ってこれらの結果が示唆するのは散逸粒子による擬1次元流は一つのユニバーサリティクラスを形成しているという事である。

ではどのように解析するのか。先に紹介した2車線の交通流モデルは基本的に解けるモデルの組み合わせであるから解析をしやすい数理構造を持っていることは間違いない。しかしながら現時点では1次元から追い越し可能モデルへのギャップは大きい。即ち車は追い越しによって絶えず順序が入れ替わっているのである。多くの擬1次元モデルの中で特別な意味合いを持たないそのモデルを直接解析する事にそれほどの意味はない。そこでモデルの直接解析を一旦やめて、筆者が (42) を得た手法を以下で紹介しよう [9]。

まず追い越しの効果は何をもたらすかと言うと今まで純粋な1次元系では安定な平衡値に保たれていた車間ないし粒子間距離が急に变化するという事である。また、先に紹介したモデルを含め多くの数値モデルでは確率変数を導入しているし、実際の車の追い越しを想定しても同じ状況で追い越すか否かはドライバーの個性に依存している。従って何らかの意味で確率変数がモデルの中に陽に含まれている事が望ましい。この事は通常の統計力学の枠組の中でも、全変数の自由度のうち、ある変数の自由度を残す様に射影を行なうと揺らぎの部分を表すノイズとそれと共役な輸送係数が現れる事とも合致している。つまり例えば2車線走行の自由度を1車線に射影してみるとノイズ変数が現れるというのは極めて自然なのである。勿論、森理論などの統計力学的手法に従って生じるノイズは無相関ではあり得ないが、ここでは現象論的に無相関なホワイトノイズ $\xi_n(t)$ を導入してみよう。1次元のダイナミクスは例えば (1) を用いると解くべき方程式は (7) 式に対応して

$$\ddot{h}_n = a[U(h_{n+1})V(h_n) - U(h_n)V(h_{n-1}) - \dot{h}_n] + \xi_n(t) \quad (43)$$

とすれば良い。但し $h_n = x_{n+1} - x_n$ は車間距離であり、 $\xi_n(t)$ は $\langle \xi_n(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_n(t)\xi_m(t') \rangle = 2D\delta_{n,m}\delta(t-t')$ を充すとする。ここで注意すべきはノイズは (1) に対して加算的に導入するのではなく、本来保存量である全車間距離が変わるように車間距離の時間発展にノイズを足す事が必要である。このような非保存的なノイズの導入によって1次元系の保存則が壊されて、実際の追い抜きの効果等を近似的に表現し得ることになる。

まずはこのランジュバン・モデルが他のモデルや実験と同様に (42) 式に示す様な $4/3$ 則を充すかどうかを直接シミュレーションで確かめてみよう。 $U(h), V(h)$ には (2) を用いて (13) と同様に $f_0 = 1/(1 + \tanh(2))$, 初期の平均車間距離を $h = h_c$ として、(13) の $a_c, \epsilon = 1/8$ に対して弱不安定な $a = a_c(1 - \epsilon^2)$, 及び弱安定な $a = a_c(1 + \epsilon^2)$ の双方のシミュレーションを行なった。特筆すべきは単に車間距離のプロファイルがランダム (フラクタル的?) になったばかりではなく、弱

安定或は弱不安定の間に大きな違いは見られない。このことは実は驚くべきことではなく、充分中立線の近傍ではノイズによって絶えず励起されている揺らぎの生成の時間スケールが揺らぎの成長或は消滅する時間スケールよりもずっと短い事を反映している。実際、弱安定であるか弱不安定であるかに関わらず車間距離の時間揺らぎのフーリエ変換によって得られるパワースペクトルは図4、5に示す様に(42)式と非常に良く一致している。

上で示した数値計算の結果から弱安定領域での理論解析、即ち線形揺らぎの緩和理論で充分であることが示唆される。線形揺らぎの緩和に話を絞って良いならば、以下の計算は(繁雑に見えても)単純であり、高分子モデルの解析とほぼ並行した計算を行なっている[15]。従って車間距離と時間スケールを適当に選び c_0 だけガリレイ変換した線形方程式

$$\partial_t r(z, t) - \partial_z^3 r(z, t) = \epsilon [\partial_z^2 - \partial_z^4] r(z, t) + \xi(z, t) \quad (44)$$

を解析しよう。ここでノイズ $\xi(z, t)$ は $\langle \xi(z, t) \rangle = 0$, $\langle \xi(z, t) \xi(z', t') \rangle = 2D \delta(z - z') \delta(t - t')$ を充す。システムサイズを l としてフーリエ級数展開

$$r(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{r}_n(t) e^{i \frac{n\pi z}{l}}; \quad \tilde{r}_n(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dz r(z, t) e^{-i \frac{n\pi z}{l}} \quad (45)$$

を用いると周期境界条件の下では(44)は

$$\tilde{r}_n(t) = \int_0^t ds e^{\lambda_n(t-s)} \tilde{\xi}_n(s); \quad \lambda_n = -i \left(\frac{n\pi}{l} \right)^3 - \epsilon \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) \quad (46)$$

と解ける。従ってある程度の時間が経った後では $k = n\pi/l$ として

$$\langle \tilde{r}_n(t) \tilde{r}_{-n}(0) \rangle = \frac{2D}{\epsilon l k^2 (1 + k^2)} e^{\lambda_n t} \quad (47)$$

となる。但し $\langle \tilde{\xi}_n(t) \tilde{\xi}_m(s) \rangle = \frac{4D}{l} \delta_{m+n,0} \delta(t-s)$ を用いている。

実際に車間距離の揺らぎなど時間発展を特徴づけるのに有効な統計量は構造関数である。連続変数に対して構造関数を

$$S_k(t) = \frac{1}{l} \int dz \int dz' \langle \exp[i(r(z, t) - r(z', t))] \rangle = \frac{1}{l} \int dz \int dz' \exp[-\frac{k^2}{2} \phi(z, z', t)] \quad (48)$$

で導入する。但し最終表式ではノイズが無相関であることを用いており、

$$\phi(z, z', t) = \langle (r(z, t) - r(z', t))^2 \rangle \quad (49)$$

である。ここで $r(z, t)$ をフーリエ展開すると

$$\phi(z, z', t) = \langle (\tilde{r}_0(t) - \tilde{r}_0(0))^2 \rangle + \sum_{n \neq 0} \{ \langle |\tilde{r}_n(t)|^2 \rangle + \langle |\tilde{r}_n(0)|^2 \rangle - 2e^{-ik(z-z')} \langle \tilde{r}_n(t) \tilde{r}_{-n}(0) \rangle \} \quad (50)$$

ここで第1項はノイズによる重心運動を表している。従って拡散係数 D_G に対して $\langle (\tilde{r}_0(t) - \tilde{r}_0(0))^2 \rangle = 2D_G t$ となる。第2項には(47)の結果を代入して

$$\phi(z, z', t) = 2D_G t + \frac{2D}{\epsilon l} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{k^2 (1 + k^2)} \{ |e^{ikz} - e^{ikz'}|^2 + 2(1 - e^{\lambda_n t}) e^{ik(z-z')} \} \quad (51)$$

となる。ここで

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|e^{ikz} - e^{ikz'}|^2}{k^2(1+k^2)} = -2 \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(k(z-z'))}{k^2(1+k^2)} + 2 \sum_{n \neq 0} \frac{1}{k^2(k^2+1)} \quad (52)$$

及び

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{k^2(1+k^2)} &= l^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{l} \coth(l) + \frac{1}{l^2} \right] \simeq \frac{l^2}{3} - l + O(1) \\ \sum_{n \neq 0} \frac{\cos(k(z-z'))}{k^2(1+k^2)} &= l^2 \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{z-z'}{l} - 1 \right|^2 - \frac{1}{6} - \frac{\pi \cosh[l - (z-z')]}{l^2 \sinh(l)} - \frac{1}{l^2} \right\} \\ &\simeq \frac{l^2}{3} - l|z-z'| + O(1) \end{aligned} \quad (53)$$

を用いると

$$\sum_{n \neq 0} \frac{|e^{ikz} - e^{ikz'}|^2}{k^2(1+k^2)} \simeq 2l|z-z'| \quad (54)$$

となる。一方、(51) の第2項は

$$\sum_{n \neq 0} \frac{e^{ik(z-z')}}{k^2(1+k^2)} (1 - e^{\lambda_n t}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[k(z-z')]}{k^2(1+k^2)} \{1 - \cos(k^3 t)\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[k(z-z')]}{k^2(1+k^2)} \sin(k^3 t) \quad (55)$$

となる。(55) 式の和 $\sum_{n=1}^{\infty}$ を積分 $\frac{l}{\pi} \int_0^{\infty} dk$ に変更して、 $x \equiv |z-z'|$ とすると

$$S_k(t) \simeq \int_{-l}^l dx \exp[-2D_G t - \frac{2Dk^2}{\epsilon} x - \frac{2Dk^2}{\pi\epsilon} h(x, t)] \quad (56)$$

となる。但し $h(x, t)$ は (55) の和からの寄与であり、 $k = Q/t^{1/3}$, $u = xt^{-1/3}$ というスケーリングを用いて

$$h(x, t) = t^{1/3} \left[\int_0^{\infty} dQ \frac{\cos(Qu)}{Q^2(1+t^{-2/3}Q^2)} (1 - \cos[Q^3]) + \int_0^{\infty} dQ \frac{\sin(Qu)}{Q^2(1+t^{-2/3}Q^2)} \right] \quad (57)$$

と与えられる。長時間の $h(x, t) = t^{1/3} \bar{h}(u)$ の振舞いは $u \propto t^{-1/3}$ であることから $\bar{h}(u \rightarrow 0)$ で決まる。そのときに $\sin(Qu) \rightarrow 0$ であることから

$$\bar{h}(0) = \int_0^{\infty} dQ \frac{1 - \cos Q^3}{Q^2} = \int_0^{\infty} dx \frac{\sin(x)}{x^{1/3}} = \frac{\pi}{\Gamma(1/3)} \quad (58)$$

となる。但し $\Gamma(x)$ は Γ 関数である。従って重心拡散で決まる程ではない時間スケールにおいて (57), (58) を (56) に代入すると

$$S_k(t) \simeq \frac{\epsilon}{Dk^2} \exp\left[-\frac{2Dk^2}{\epsilon\Gamma(1/3)} t^{1/3}\right] \quad (59)$$

という Stretched exponential 則に従う構造関数の緩和が見られる。

(59) の短時間の振舞いは $S_k(t) \simeq S_k(0)[1 - \beta k^2 t^{1/3} + \dots]$ と展開できる。但し $\beta = \frac{2Dk^2}{\epsilon\Gamma(1/3)}$ である。このフーリエ変換がパワースペクトルに他ならないので $P(k, f)$ は

$$P(k, f) \sim f^{-\alpha}, \quad \alpha = 4/3 \quad (\text{as } f \rightarrow \infty), \quad (60)$$

となる。ここで $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i2\pi ft} |t|^{1/3} \propto f^{-4/3}$ を用いた。ここでの指数 $4/3$ は実験やシミュレーションで広く観測されているものと同一である。

この節では線形緩和理論を紹介した。日頃、非線形の世界で暮らしている者にとって線形理論の成功はやや意外な観もあるが、実験やシミュレーションの支持及び物理的な解釈が可能であることから線形近似の妥当性は問題がなさそうである。不安定領域で示さなければならないのは非線形項の寄与が摂動論的に効かない事を示す必要があるが、それは今後の課題としたい。また実際に単純なランジュバンモデル（例えば (43)）が成功を収めた事実を統計力学の伝統的な手続きに従って示す必要がある。いずれにしても多次元の効果がわずかに入るだけで可積分性のかけらも見えなくなってしまった事はある意味で教訓的であるかもしれない。つまり自然認識にソリトンをそのまま適用できる場合は余り存在しそうもないという事である。

7 まとめ

本稿では擬1次元散逸粒子流の統一的な数理解析を紹介した。

純粋な1次元系では非常に簡単な解の構造を持っており、基本的にソリトン摂動論の枠組の中でかなり多くの現象が記述できる事を紹介した。今後、或は特殊なモデルの厳密解も求める事が出来るかもしれない。しかしながらいわゆる完全可積分系ではないので数理解析はかなり異なったものであるし、基本的な性質はここで紹介したものと大差はないであろう。それでも散逸系の厳密解がどのような意味を持ち得るかを試す試金石となり得るので数理的な意味はあるかもしれない。

同時に6節では多次元効果として簡単な2車線モデルの結果との比較などからランジュバン方程式を用いた解析が有用であることを紹介した。また線形緩和理論を用いて $1/f$ ノイズの一種であるスペクトルを説明できることを示した。理論的には多次元効果が無相関のノイズで置き換えられるか、或は線形理論で本当に良いのかを確かめる必要があるが結果としては明白にうまく行っている。これらの理論的課題はどちらかと言うあるは正しい仮説の証明をする手続きに近いものがある。また同時にここで得られた解析法は巷間に溢れている $1/f$ スペクトルの発現機構についての示唆も与えるものとなっている。今後、スペクトルの問題は或は解決するのもかもしれない。

8 謝辞

本稿の大部分は中西健一氏との共同研究に依っている。氏に感謝したい。また和田重明氏、鷹合孝之氏、森山修氏及び中央大学の実験グループとの研究成果も一部紹介させて頂いた。彼らに感謝したい。また粉体・交通流研究の全般に関して小松輝久氏、市來健吾氏、大信田丈志氏との議論は得るものが多かった。改めて謝意を表したい。

参考文献

- [1] H.Hayakawa, H.Nishimori, S.Sasa, Y-h. Taguchi, Jpn.J.Appl.Phys. 34, 397 (1995); H.M.Jaeger, S.R.Nagel and R.B.Behringer, Rev.Mod.Phys. 68, 1259 (1996) and references therein.
- [2] e.g. G.B.Whitham, Linear and Nonlinear Waves (Wiley, New York, 1974); R. Huberman, Mathematical model: Traffic flow (Prentice Hall, 1977); D.Helbing, Traffic Dynamics: New

- Physical Modeling Concepts (Springer, Berlin, 1997).
- [3] H. Hayakawa and K.Nakanishi, patt-sol/9707002
 - [4] M.Bando, K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata and A.Sugiyama, Phys.Rev.E **51**, 1035 (1995).
 - [5] T.S.Komatsu and S.Sasa, Phys.Rev. E **52**, 5597 (1995).
 - [6] B.S.Kerner and P.Konhauser, Phys.Rev. E **48**, 2335 (1993). , D.A.Kurtze and D.C.Hong, Phys.Rev.E **52** 218 (1995).
 - [7] T.S.Komatsu, PhD thesis (Tohoku University, 1996).
 - [8] S.Sasa and H.Hayakawa, Europhys.Lett. **17**, 685 (1992): see also, G.K.Batchelor, J.Fluid Mech. **193**, 75 (1988): T. S. Komatsu and H. Hayakawa, Phys. Lett. A **183**, 56 (1993) M. F. Göz, Phys.Rev.E **52**,3697 (1995).
 - [9] O.Moriyama, N.Kuroiwa, and M.Matsushita, and H.Hayakawa, preprint.
 - [10] 和田重明、早川尚男：物理学会 1997
 - [11] Ooshida, T. and T. Kawahara, Phys. Rev. E **56**, 511 (1997).
 - [12] 中西健一、早川尚男：物理学会 1997
 - [13] 鷹合孝之、早川尚男：物理学会 1997
 - [14] G.Peng and H.J.Herrmann, Phys.Rev.E **49**, 1796 (1994): Phys. Rev. E **51**, 1745 (1995).
 - [15] P.G. de Gennes, Physics **3**, 37 (1967): M. Doi and S. F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford, 1986).

- 図1 (4) 式のシミュレーションによって得られたデータ ('KK.data') 及び中立線 $x^2 W(x)^2$, 4 節の方法で理論的に得られた共存線 $co(x)$. 但し $W(x) = U'(x)$, x は平均密度 $bar\rho$ であり、 $U_\rho = U_0[\tanh(\alpha(\rho_{cp} - \rho_0)) - \tanh(\alpha(\rho - \rho_0))]$ とした。 $U_0 = 2.52305$, $\alpha = 1/0.12$, $\rho_0 = 0.25$, $\rho_{cp} = 1$.
- 図2 理論的に求めた共存線 (41) 式 (実線) と中立線 (11) 式 (破線) の平均車間距離 h 依存性。シミュレーションで得られたデータは a を与えた時のスケーリング領域での最大及び最小の車間距離。
- 図3 理論曲線 (23),(39) 式の線形結合及びシミュレーションで得られた車間距離のスケールされたデータ。但しデータは各 $(\epsilon, N) = (1/2, 32), (1/4, 64), (1/8, 128), (1/16, 256)$, ここで ' $N.s$ ' は N 台の車のデータ. 実線の理論曲線は $R(z) = \tanh(\xi\theta_+(z-z_+)) - 1 + \tanh(\xi\theta_-(z-z_-))$ with $\xi = (6\gamma^*)^{1/2}/16$ であり、界面の位置は $z_+ = 62.5$ と $z_- = 190.5$ した。空間スケールは $N = 256$ におけるものとした。
- 図4 (43) 式のモデルのシミュレーションで得られたパワースペクトル。 $\xi_n(t)$ は正規乱数の代わりに $[-0.1, 0.1]$ の間の一様乱数とした。また $a = a_c(1 - \epsilon^2)$ で $\epsilon = 1/8$. データは先頭車と最高尾の車の距離の揺らぎのフーリエスペクトル。データは時間刻み $\delta t = 1/2^4$ 毎に 2^{15} steps まで取ってある。直線は $f^{-4/3}$ を示すガイドライン。
- 図5 (43) 式のモデルのシミュレーションで得られたパワースペクトル。図4のかわりに弱安定領域 $a = a_c(1 + \epsilon^2)$ で行なったシミュレーション結果。

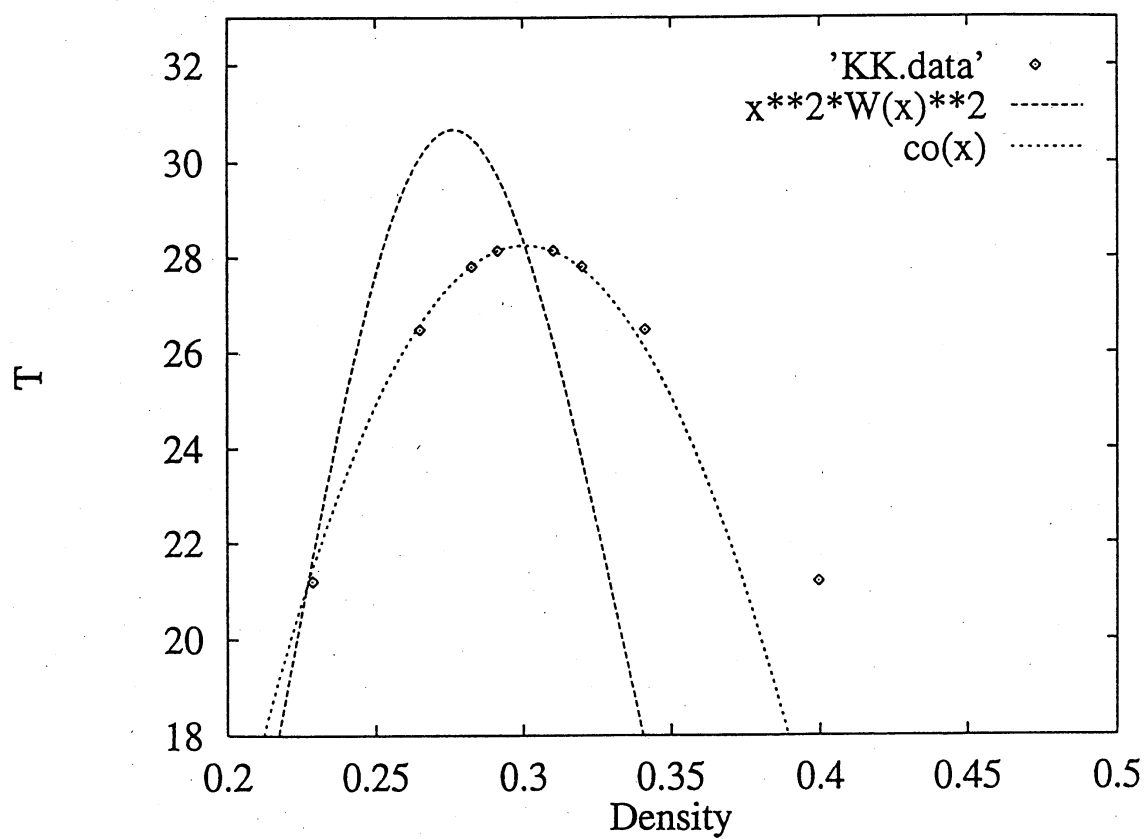


Figure 1

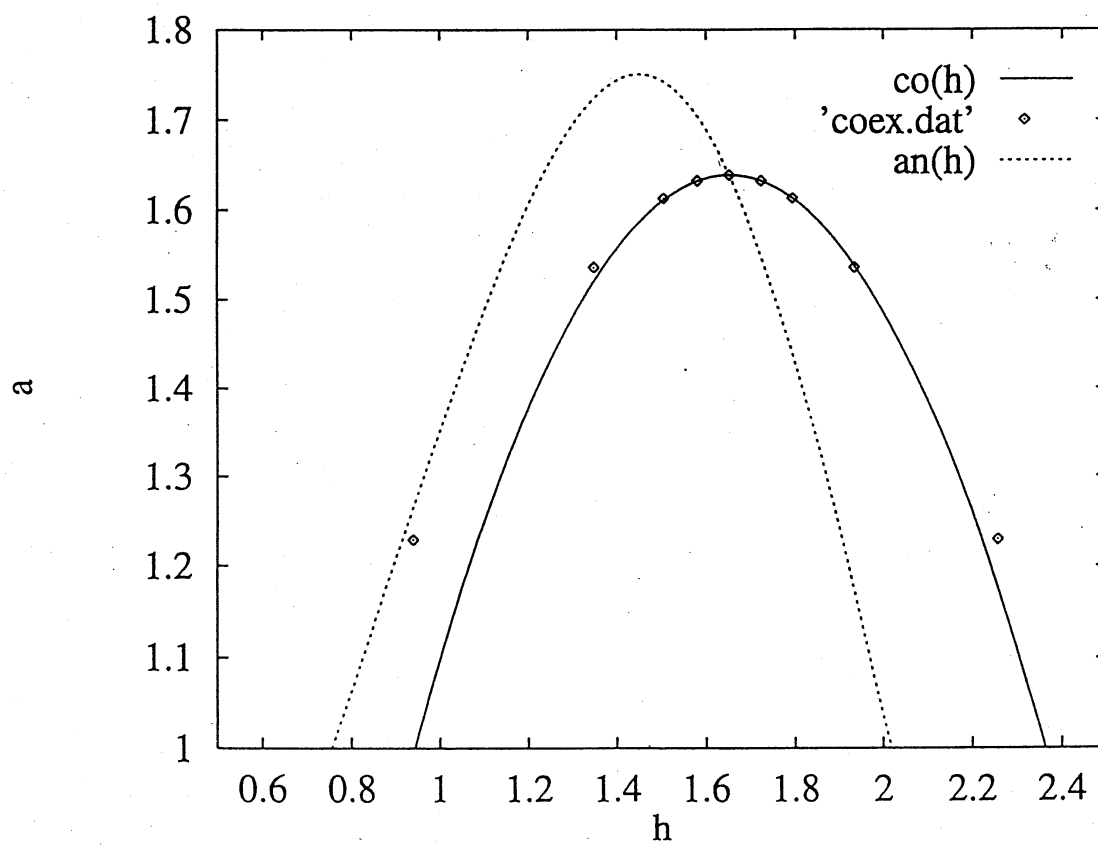


Figure 2

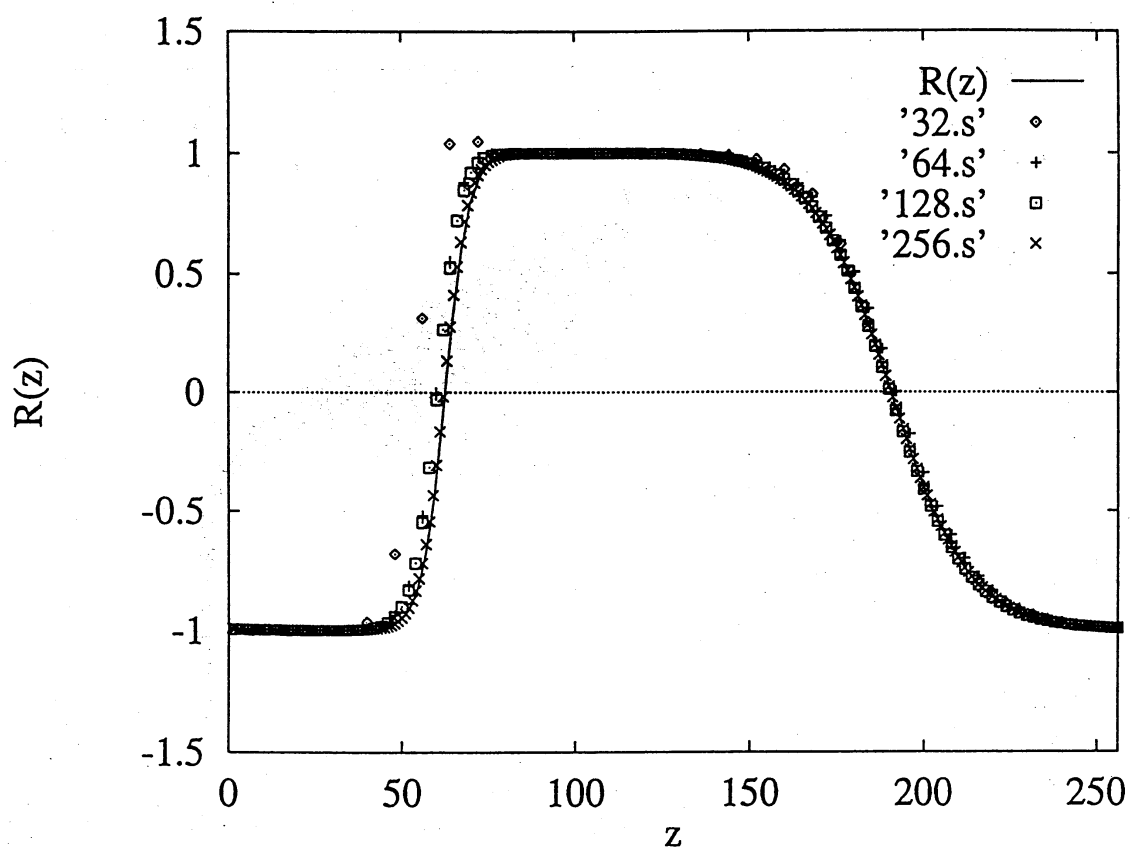


Figure 3

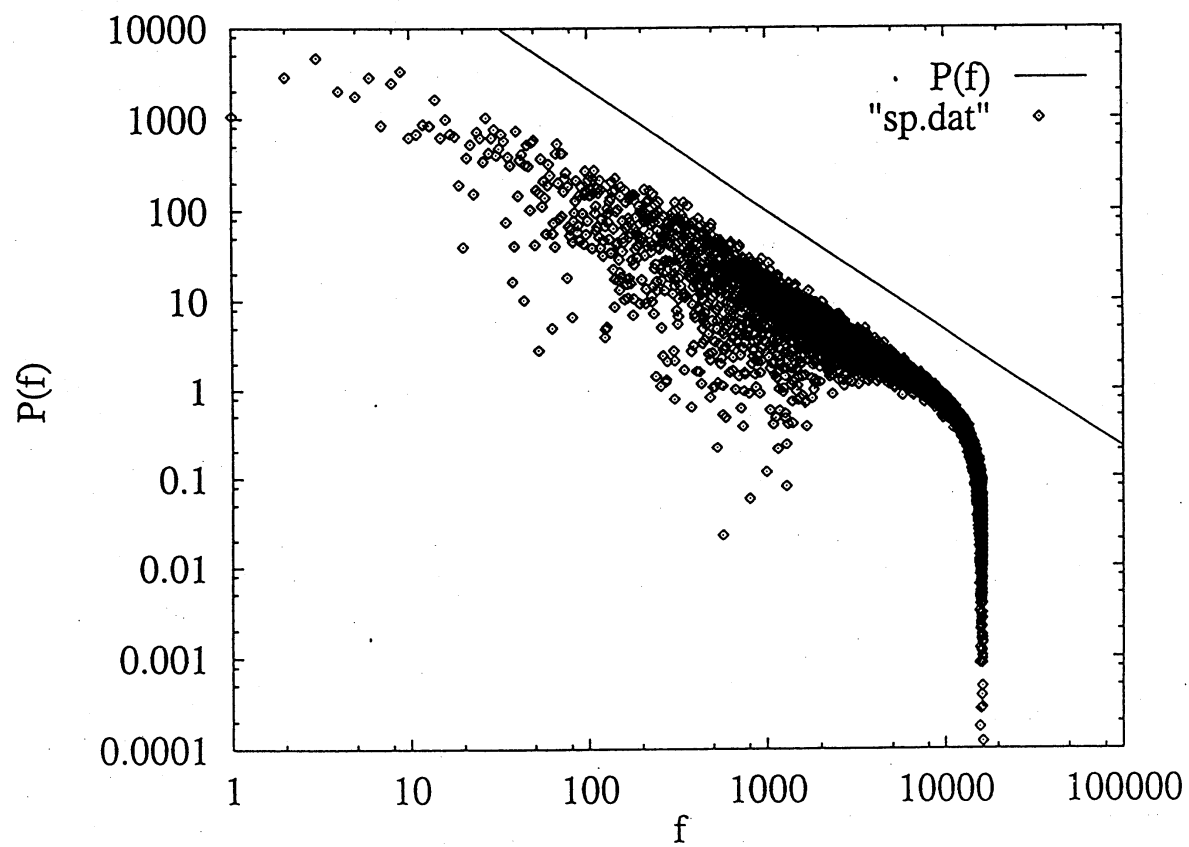
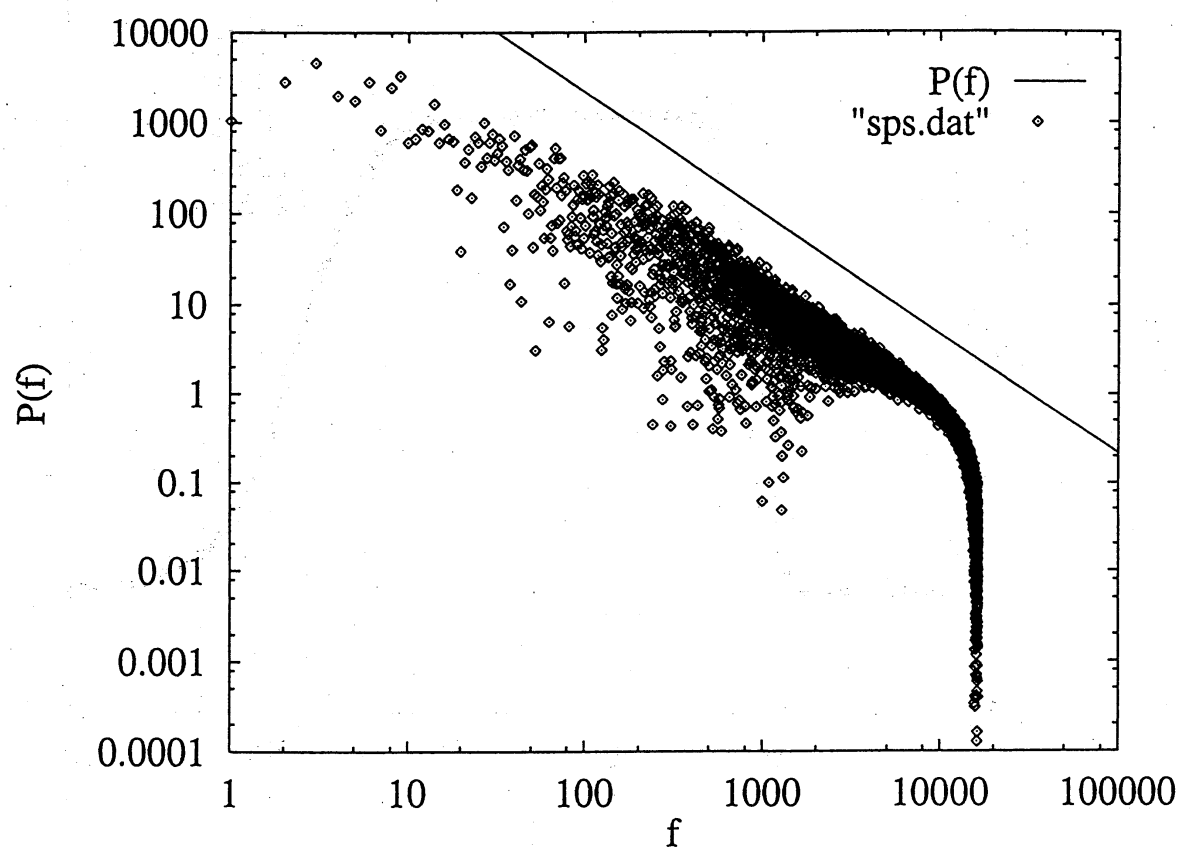


Figure 4



□ 5